ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ THỊ PHƯƠNG QUỲNH

BIỂU DIỄN TỰ ĐẲNG CẤU VÀ PHÂN TÍCH PHỔ CỦA BIỂU DIỄN CHÍNH QUY CỦA MỘT SỐ LỚP NHÓM LIE REDUCTIVE THỰC THẤP CHIỀU

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số : 62 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TSKH. ĐỖ NGỌC DIỆP

2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Đỗ Ngọc Diệp, luận án tiến sĩ chuyên ngành toán giải tích với tên đề tài "Biểu diễn tự đẳng cấu và phân tích phổ của biểu diễn chính quy của một số lớp nhóm Lie reductive thực thấp chiều" là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các kết quả nghiên cứu được trình bày trong luận án là trung thực, khách quan và chưa từng để bảo vệ ở bất cứ học vị nào.

Tôi xin cam đoan các thông tin trích dẫn trong luận án này đều được chỉ rõ nguồn gốc và tuân thủ đúng quy tắc.

Tác giả

Đỗ Thị Phương Quỳnh

LỜI CẢM ƠN

Trong quá trình thực hiện đề tài "Biểu diễn tự đẳng cấu và phân tích phổ của biểu diễn chính quy của một số lớp nhóm Lie reductive thực thấp chiều". Tôi đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ, tạo điều kiện của tập thể lãnh đạo, các nhà khoa học, cán bộ, chuyên viên Khoa Sau Đại học, Khoa Toán, giảng viên, cán bộ các phòng, ban chức năng Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn chân thành về sự giúp đỡ đó.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS. TSKH. Đỗ Ngọc Diệp người thầy đã trực tiếp hướng dẫn và chỉ bảo tận tình cho tôi hoàn thành luận án này.

Tôi xin chân thành cảm ơn bạn bè, đồng nghiệp của tôi và gia đình đã động viên, khích lệ, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình thực hiện và hoàn thành luận án này.

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 02 năm 2017

Nghiên cứu sinh

Đỗ Thị Phương Quỳnh

Mục lục

Trang bìa phụ . . . . **i**

Lời cam đoan . . . . **i**

Lời cảm ơn . . . . **ii**

Mục lục . . . . **iii**

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt . . . . **v**

Mở đầu **1**

Chương 1. Từ công thức Poisson cổ điển đến công thức vết Arthur-Selberg **8**

1.1. Công thức tổng Poisson cổ điển 8

1.2. Nhóm nhân của các số phức và biến đổi Fourier-Laplace 11

1.3. Công thức vết Arthur-Selberg 12

1.3.1. Công thức vết 12

1.3.2. Công thức vết ổn định 14

Chương 2. Nhóm hạng 1 . . . . **15**

2.1. Nhóm nội soi của $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 16

2.2. Biểu diễn tự đẳng cấu 18

2.2.1. Tương ứng Langlands hình học 20

2.2.2. Lượng tử hóa hình học 21

2.3. Công thức vết Arthur-Selberg 24

2.3.1. Công thức vết 24

2.3.2. Công thức vết ổn định 28

2.4. Nội soi 28

2.5. Công thức tổng Poisson ... 32
2.5.1. Vế hình học của công thức vết ... 32
2.5.2. Vế phổ của công thức vết ... 33
2.5.3. Công thức tổng Poisson ... 33
Chương 3. Nhóm hạng 2 ... 35
3.1. Công thức tổng Poisson và nội soi cho $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ ... 35
3.1.1. Biểu diễn unita bất khả quy ... 35
3.1.2. Cảm sinh chỉnh hình ... 40
3.1.3. Dãy phổ Hochschild-Serre ... 41
3.1.4. Nội soi ... 42
3.1.5. Tích phân quỹ đạo ổn định ... 47
3.1.6. Công thức tổng Poisson ... 49
3.2. Công thức tổng Poisson và nội soi cho $\mathrm{SU}(2,1)$ ... 49
3.2.1. Biểu diễn unita ... 49
3.2.2. Cảm sinh chỉnh hình ... 52
3.2.3. Dãy phổ Hochschild-Serre ... 54
3.2.4. Trường hợp chỉnh hình hoặc không chỉnh hình ... 54
3.2.5. Công thức vết ... 55
3.2.6. Nội soi và tổng Poisson ... 56
3.3. Công thức tổng Poisson và nội soi cho $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$ ... 63
3.3.1. Biểu diễn cảm sinh chỉnh hình ... 67
3.3.2. Cảm sinh đối đồng điều ... 69
3.3.3. Dãy phổ Hochschild-Serre ... 72
3.3.4. Nội soi ... 73
3.3.5. Công thức tổng Poisson ... 76
Kết luận và kiến nghị ... 80
Danh mục các công trình công bố của tác giả ... 81
Tài liệu tham khảo ... 82

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

$\mathbb{C}$	Tập số phức
$\mathbb{N}$	Tập số tự nhiên
$\mathbb{R}$	Tập số thực
$\mathbb{Z}$	Tập số nguyên
$\mathbb{R}_+^*$	Tập số thực dương
$\mathbb{C}^*$	là tập số phức khác không
$\rtimes$	Tích nửa trực tiếp phải
$\ltimes$	Tích nửa trực tiếp trái
$\oplus$	Tổng trực tiếp
$\cong$	Đẳng cấu
$K\backslash G/K$	G chia thương trái và phải cho K
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$	Ma trận đường chéo
L^2	Không gian các hàm bình phương khả tích
${}^oL^2$	Phần rời rạc của không gian các hàm bình phương khả tích
L^2_{cont}	Phần liên tục của không gian các hàm bình phương khả tích
$\mathrm{tr}\, A$	Vết của ma trận A
$\det A$	Định thức của ma trận A
$\mathcal{D}_k$	Biểu diễn chuỗi rời rạc
$\pi_1(\sum)$	Nhóm cơ bản của không gian tôpô $\sum$
$\Theta^\perp$	Phần bù trực giao của Θ trong $L^2(G)$
$\mathcal{H}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$	Đại số Hecke trên $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ gồm các hàm lớp C_0^∞ và K- bất biến 2 phía
$\lvert\lvert f\rvert\rvert$	Chuẩn của hàm f
$\hat{G}$	Nhóm đối ngẫu của G, gồm các lớp tương đương của các biểu diễn unita bất khả quy của G
$\mathbb{S}^1$	Đường tròn đơn vị
$C_0^\infty(\mathbb{R})$	Lớp hàm trơn có giá compact

$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus}$	Tích phân trực tiếp của các biểu diễn
$Ind_B^G\chi$	Biểu diễn cảm sinh từ B lên G
$\{\Gamma\}$	Tập các phần tử đại diện của các lớp liên hợp
Vol	Thể tích
$\mathcal{O}(f)$	Tích phân quỹ đạo của hàm f
$Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$	Nhóm Galois của mở rộng $\mathbb{C}/\mathbb{R}$
$\widetilde{G}$	Phủ phổ dụng của nhóm G
$\mathcal{S}_k(\Gamma)$	Không gian các dạng modular trọng k của nhóm con rời rạc Γ

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Giải tích điều hòa là một ngành toán nghiên cứu biểu diễn của các hàm hay phân tích, tổng hợp các sóng cơ bản và nghiên cứu tổng quát các khái niệm của lý thuyết chuỗi Fourier và biến đổi Fourier. Trong thế kỷ qua, giải tích điều hòa đã trở thành một lĩnh vực lớn với các ứng dụng trong nhiều lĩnh vực đa dạng như xử lý tín hiệu, cơ học lượng tử, phân tích thủy triều và thần kinh học.

Biến đổi Fourier cổ điển trên $\mathbb{R}^n$ vẫn là lĩnh vực đang được nhiều nhà nghiên cứu "khai thác" đặc biệt là những vấn đề có liên quan đến biến đổi Fourier trên đối tượng tổng quát hơn như hàm suy rộng điều hòa.

Giải tích điều hòa trừu tượng (xem [18]) bao gồm cả lý thuyết biểu diễn (xem [14], [25]), được sử dụng như một cơ sở thay thế vai trò của các hàm mũ trong phân tích Fourier cổ điển. Nói cách khác giải tích điều hòa trừu tượng là sự mở rộng của phân tích Fourier cổ điển lên một nhóm G tùy ý. Trong vấn đề này, có sự khác biệt lớn giữa trường hợp nhóm Aben và nhóm không Aben. Phân tích Fourier trên nhóm Aben G được xác định trong các số hạng của các đặc trưng nhóm tương ứng. Tuy nhiên đặc trưng bội là không phù hợp để mở rộng phân tích Fourier trên nhóm không Aben. Do đó trong trường hợp này biểu diễn nhóm (xem [24]) cho câu trả lời phù hợp (chú ý rằng đối với nhóm Aben các biểu diễn bất khả quy đều là một chiều).

Trong giải tích điều hòa cổ điển trên $\mathbb{R}$, công thức Poisson cho các hàm suy rộng là:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-inx},$$

trong đó δ là hàm Dirac. Công thức trên đóng vai trò rất quan trọng với một hàm $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ được viết ở dạng

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m),$$

trong đó

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$$

là biến đổi Fourier của f. Vế trái của công thức trên được xem là phân tích của biểu diễn chính quy thành tổng các thành phần bất khả quy và vế phải được xem là tổng các giá trị biến đổi Fourier. Chính công thức này có thể cho một phân tích trên không gian các hàm bình phương khả tích như sau:

$$L^2(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\oplus} \mathbb{C}_n,$$

với $\mathbb{C}_n = \mathbb{C}$. Mặt khác, công thức này dễ dàng được phát triển trên ngôn ngữ nhóm cho các nhóm sau: $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}^*$.

Nếu ta xét $G = \mathbb{S}^1$ là một nhóm Lie compact giao hoán, lý thuyết chuỗi Fourier cho một câu trả lời thỏa đáng cho nhiều vấn đề của giải tích Fourier như biến đổi Fourier và biến đổi Fourier ngược, công thức Plancherel .... Nếu chúng ta có một hàm trên $\mathbb{R}$ thì chúng ta có thể lấy trung bình trên các điểm nguyên để chuyển đến một hàm trên $\mathbb{S}^1$. Công thức tổng Poisson cho ta mối quan hệ giữa tổng trên các điểm nguyên của các giá trị của hàm trên $\mathbb{R}$ với giá compact và tổng của các ảnh Fourier tương ứng của nó. Công thức này là một công cụ quan trọng cho giải tích phổ của không gian các hàm bình phương khả tích trên đường tròn đơn vị $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1; \frac{1}{2\pi}d\theta)$. Chính xác hơn, không gian $L^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{C})$ được phân tích thành tổng trực tiếp trực giao rời rạc của vô hạn lần của $\mathbb{C}$:

$$L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\oplus} \mathbb{C}_n^1; \mathbb{C}_n^1 \cong \mathbb{C}.$$

Còn trong trường hợp G là nhóm cộng $\mathbb{R}$ cũng có kết quả tương tự như lý thuyết biến đổi Fourier.

Nhóm nhân $\mathbb{R}_+^*$ là vi phôi với $\mathbb{R}$ và tích phân Fourier tương ứng được gọi là biến đổi Mellin. Công thức nghịch đảo Mellin và công thức Plancherel có dạng phân tích không gian $L^2(\mathbb{R}_+^*; \frac{dx}{x})$ thành một tích phân trực tiếp

$$L^2(\mathbb{R}_+^*) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C}_\lambda^1 d\lambda, \mathbb{C}_\lambda^1 \cong \mathbb{C}.$$

Nhóm nhân $\mathbb{C}^*$ của các số phức khác không là đồng phôi với tích trực tiếp của nhóm con compact $\mathbb{S}^1$ và nhóm con không compact $\mathbb{R}_+^*$ và vì thế có phân tích phổ của $L^2(\mathbb{C}^*; \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{dr}{r}d\theta)$, theo I.M. Gelfand, thành tổng trực tiếp rời rạc và tích phân trực tiếp liên tục.

$$L^2(\mathbb{C}^*/2\pi\mathbb{Z} \times \{1\}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\oplus} \mathbb{C}_n \oplus \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C}_\lambda^1.$$

Bài toán được đặt ra là nghiên cứu để tìm ra công thức tổng Poisson tương tự như công thức Poisson nói trên trong khuôn khổ giải tích điều hòa trừu tượng trên các nhóm nửa đơn hoặc reductive. Công thức Poisson trừu tượng tổng quát chưa tồn tại nên chúng tôi tiếp cận đến bài toán này trên lớp các nhóm Lie có hạng 1 là nhóm $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ hoặc phủ phổ dụng $\mathrm{SU}(1,1)$ cho nên chỉ cần nghiên cứu trường hợp $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ là đủ. Các nhóm hạng 2 là $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R}), \mathrm{SU}(2,1)$ và $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$, trong các trường hợp này chúng tôi tính toán các tích phân quỹ đạo cụ thể.

Khi nhóm G là nhóm tuyến tính đặc biệt $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, tác động trên nửa mặt phẳng Poincaré $\mathbb{H} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ bởi các biến đổi phân tuyến tính, chúng ta có thể chọn nhóm con Fuchsian kiểu I, $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sao cho thể tích hữu hạn $Vol(\Gamma\backslash G) < +\infty$ tương ứng với độ đo Haar tự nhiên trên $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Khi đó nhóm tuyến tính đặc biệt này tồn tại duy nhất, chính xác đến liên hợp, một nhóm con Cartan H [27] là xuyến $T(\mathbb{C}) = GL_1(\mathbb{C}) = C^*$. Mặt khác $L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$ được phân tích phổ thành tổng trực giao hai phần đó là phần liên tục $L^2_{cont}(\Gamma\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$ và phần rời rạc ${}^oL^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$. Phần rời rạc được phân tích thành tổng trực tiếp trực giao của các biểu diễn tự đẳng cấu, tức là các biểu diễn thu được từ biểu diễn chuỗi rời rạc của G, sau đó tính vết cho một biểu diễn chuỗi rời rạc này thì ta nhận được vế giải tích (hay vế phổ) của công thức tổng